Volume: 26, Nomor: 1, April 2024, hlm. 29-39
p-ISSN: 1410-8771, e-ISSN: 2580-4812
https://doi.org/10.37303/likhitaprajna.v26i1.280

LIKHITAPRAJNA Jurnal Ilmiah
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

PELABELAN SUPER GRACEFUL PADA GRAF B (m, n, k) DAN GRAF $P_n(1, 2, \ldots, n)$ SERTA IMPLEMENTASINYA PADA MATLAB

Ruvita Iffahtur Pertiwi
Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Wisnuwardhana Malang, Indonesia
Email: ruvitapertiwi@gmail.com

ARTICLE INFO
Received 16 February 2024
Revised 19 March 2024
Accepted 6 April 2024
Published 15 April 2024

Keywords:
super graceful labeling, graf B(m,n,k), graf $P_n(1,2,\ldots,n)$
Kata Kunci:
Pelabelan super graceful, graf B(m,n,k), graf $P_n(1,2,\ldots,n)$

To cite this article *Pertiwi, R. (2024). Pelabelan Super Graceful pada Graf B dan Graf serta Implementasinya pada Matlab. Jurnal Likhitaprajna, 26(1). https://doi.org/10.37303/likhitaprajna.v26i1.280*

Abstract: *Suppose G is a graph with vertices p dan edges q. Super graceful labeling is a one-to-one function maping on $f{:}V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, p+q\}$ such that $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ differs for each edge $uv \in E(G)$. A graph G is called super graceful if it can be labeled according to the definition of super graceful labeling. The graph B(m,n,k) is a graph consisteing of a path graph of length k conneting the star graph $K_{(1,m)}$ and $K_{(1,n)}$ at the pendant ends. Meanwhile, the graph $P_n(1,2,\ldots,n)$ is a path graph of length by n combining each vertex on the path graph with edges i to i members (1,2,…,n). In this journal, it will be shown that graph B(m,n,k) and graph $P_n(1,2,\ldots,n)$ are super graceful graphs.*

Abstrak*: Misalkan G merupakan suatu graf dengan banyaknya simpul p dan banyaknya sisi q. Pelabelan super graceful adalah pemetaan fungsi satu-satu pada $f{:}V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, p+q\}$ sehingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ berbeda untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Sebuah graf G disebut graf super graceful jika graf tersebut dapat dilabeli menurut definisi pelabelan super graceful. Graf B(m,n,k) adalah graf yang terdiri dari sebuah graf lintasan dengan panjang k yang mengikatkan graf bintang $K_{(1,m)}$ dan $K_{(1,n)}$ di ujung pendan. Sedangkan graf $P_n(1,2,\ldots,n)$ adalah graf lintasan dengan panjang n dengan menggabungkan masing-masing simpul pada graf lintasan dengan sisike i sebanyak i anggota (1,2,…, n). Pada jurnal ini akan ditunjukkan bahwa graf B(m,n,k) dan graf $P_n(1,2,\ldots,n)$ merupakan super graceful.*

PENDAHULUAN

Pelabelan adalah proses yang menghubungkan entitas di himpunan simpul atau sisi dengan nilai numerik yang disebut label. Jenis-jenis pelabelan meliputi pelabelan simpul, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Terdapat beragam jenis pelabelan yang telah diteliti, salah satunya adalah pelabelan graceful.

Pelabelan *graceful* pertama kali diperkenalkan oleh Rosa (1966), pada artikelnya yang berjudul "*On Certain Valuations of The Verticel of a Graph"* dibuktikan beberapa graf adalah *graceful*, contohnya graf lintasan dan graf pohon. Pelabelan ini kemudian dikembangkan menjadi pelabelan *super graceful*. Penelitian mengenai pelabelan *super graceful* diantaranya dilakukan oleh M. A. Perumal, dkk. (2012), artikelnya yang berjudul *"super graceful labeling for some simple graphs"* dijelaskan bahwa $P_n(n \leq 1)$ adalah graf *super graceful*. Pada penelitian berikutnya tahun 2012, M. A. Perumal, dkk. membahas pelabelan *super graceful* untuk graf khusus pada artikelnya *"Super Graceful Labeling for Some Special Graph"* membuktikan bahwa pelabelan graf $P_{n-1}(1,2,\ldots,n)$ merupakan pelabelan *super graceful*.

Misalkan G adalah suatu graf dan p menyatakan banyaknya simpul, sedangkan q menyatakan banyaknya sisi. Didefinisikan pelabelan *super graceful* merupakan pemetaan fungsi satu-satu pada $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,p+q\}$ sedemikian sehingga $f(uv) = |f(u) - f(v)|$ menjadi berbeda untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Sebuah graf G disebut graf *super graceful* apabila menurut definisi pelabelan *super graceful* tersebut dapat dilabeli. Pada jurnal ini dibahas suatu pelabelan *super graceful* pada graf $B(m,n,k)$ dan graf $P_n(1,2,\ldots,n)$, serta implementasinya pada MATLAB menghasilkan pelabelan yang sama pada graf $B(m,n,k)$.

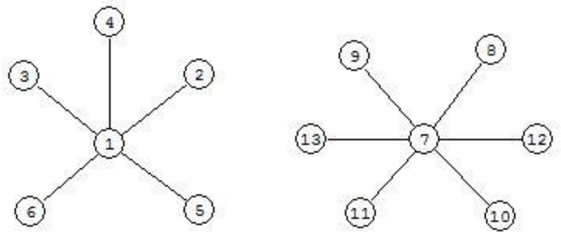
Beberapa definisi-definisi graf yang akan digunakan pada jurnal ini untuk memudahkan pada bagian berikutnya.

Terminologi Dasar Graf

Definisi 1. *Suatu Graf G adalah pasangan dua himpunan $V(G)$ dan $E(G)$, dinotasikan dengan $(V(G), E(G))$, dimana, $V(G)$ adalah himpunan yang tak kosong dari simpul-simpul dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan dua simpul di G. Jika e menghubungkan simpul u dengan simpul v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (uv)$.*

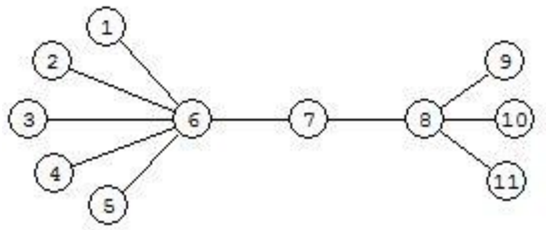
Definisi 2. *Suatu graf lintasan dengan n simpul dinotasikan dengan P_n adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal.*

Definisi 3. *Suatu graf bintang adalah graf bipartit komplit $K_{1,k}$ dengan 1 sebagai simpul pusat dan k menandakan banyak pendan.*



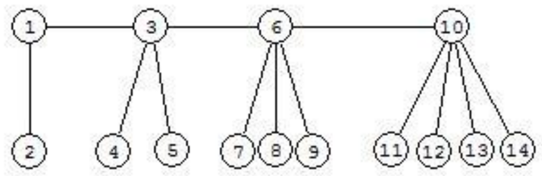
Gambar 1. Contoh graf Bintang $K_{1,5}$ dan $K_{1,6}$

Definisi 4. *Suatu graf $B(m,n,k)$ adalah graf yang terdiri dari graf lintasan dengan panjang k yang mengikat simpul pusat graf bintang $K_{(1,m)}$ dan $K_{(1,n)}$ pada ujung simpul graf lintasan.*



Gambar 2. Contoh graf $B(5,3,2)$

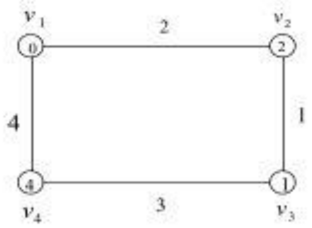
Definisi 5. *Suatu graf* $P_n(1,2,\ldots,n)$ *adalah graf lintasan dengan panjang* n *dengan menggabungkan masing-masing simpul pada graf lintasan dengan sisi ke-*i *sebanyak* i *anggota* $(1,2,\ldots,n)$.



Gambar 3. Contoh graf $P_4(1,2,3,4)$

Definisi 6. *Pelabelan graceful dari graf* $G=(V,E)$ *adalah pemetaan injektif* $f: V(G) \to 0,1,2,3,,q$ *dengan* $q=|E(G)|$ *sedemikian sehingga* $f(uv)=|f(u)-f(v)|$, *untuk setiap* $uv \in E(G)$ *sehingga label sisi yang dihasilkan berbeda.*

Definisi 7. *Pelabelan super graceful dari graf* G *adalah pemetaan bijektif* $f: V(G) \cup E(G) \to 0,1,2,3,\ldots,p+q$ *sedemikian sehingga* $f(uv)=|f(u)-f(v)|$, *untuk setiap sisi* $uv \in E(G)$. *Sebuah graf* G *yang memiliki pelabelan super graceful disebut graf super graceful.*



Gambar 4. Contoh Pelabelan Graceful

PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan ditunjukkan hasil pembahasan tentang pelabelan *Super Graceful* pada graf $B(m,n,k)$ dan graf $P_n(1,2,\ldots,n)$.

Teorema 1. *Graf* $B(m,n,k)$ *adalah graf super graceful.*

Bukti. Misalkan $u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,m}$ adalah simpul yang terhubung ke v_0 dan $u_{2,1}, u_{2,2}, \ldots, u_{1,n}$ adalah himpunan dari simpul yang terhubung ke v_k. Misalkan v_0 dan v_k adalah ujung dari graf lintasan $P_k = v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$. Diberikan $G=B(m,n,k)$, maka:
$|V(G)| = m+n+k+1, |E(G)| = m+n+k.$

Kasus 1, k adalah bilangan gasal

Didefinisikan $f: V(G) \cup E(G) \to 1,2,\ldots 2(m+n+k)+1$ dengan $f(u_{1,i}) = 2i-1$, $1 \le i \le m$ dan $f(u_{2,l}) = 2m+k+2l, 1 \le l \le n$.

$$f(v_j) = \begin{cases} 2(m+n+k)+1-j, 0 \le j \le k-1, j \equiv 0(mod2) \\ 2m+j, 0 \le j \le k, j \equiv 1(mod2) \end{cases}$$

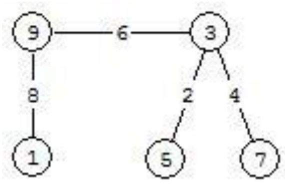
Didapat kontruksi himpunan label simpul sebagai berikut:

$$V_2 = \bigcup_{i=1}^{m} \{f(u_{1,i})\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{2i-1\} = \{1,3,5,\ldots,2m-1\}$$

$$V_2 = \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0}^{k-1} \{2(m+n+k)+1-j\} = \{2(m+n+k)+1, 2(m+n+k)-1, \dots, 2(m+n+1)+\ k\}$$

$$V_3 = \bigcup_{j=0, j\equiv 1(mod2)}^{k-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0}^{k-1} \{2m+j\} = \{2m+1, 2m+3, \dots 2m+k\}$$

$$V_4 = \bigcup_{l=1}^{n} \{f(u_{2,l})\} = \bigcup_{l=1}^{n} 2m+2l+k = \{2m+k+2, 2m+k+4, \dots, 2m+k+2n\}$$



Gambar 5. Contoh Pelabelan Super Graceful

Didapat kontruksi himpunan label sisi sebagai berikut:

$$E_1 = \bigcup_{l=1}^{m} \{f(v_0 u_{1,i})\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{|f(v_0) - f(u_{1,i})|\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} \{|2(m+n+k)+1-(2i-1)|\}$$

$$= \{|2(m+n+k)+1-1, 2(m+n+k)+1-3, \dots, 2(m+n+k)+1-(2m-1)|\}$$

$$= \{2(m+n+k), 2)m+n+k)-2, \dots, 2)n+k)+2\}$$

$$E_2 = \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{|f(v_j) - f(v_{j+1})|\}$$

$$= \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{|2(m+n+k)+1-j-(2m+j+1)|\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{|2(n+k-j)|\} =$$

$$= \{2(n+k), 2(n+k-2), 2(n+k-4), \dots, 2(n+1)\}$$

$$E_3 = \bigcup_{j=1, j\equiv 1(mod2)}^{k-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{j=1, j\equiv 1(mod2)}^{k-2} \{|f(v_j) - f(v_{j+1})|\}$$

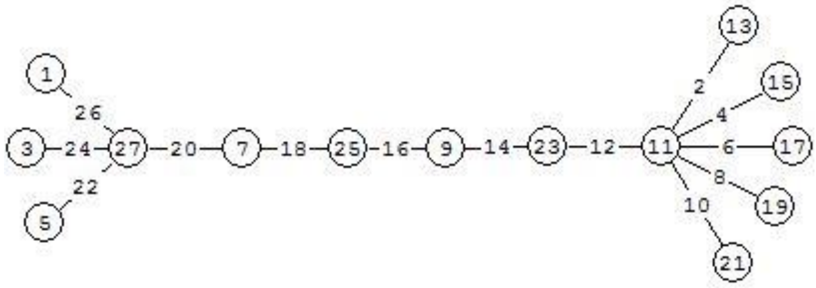
$$= \bigcup_{j=1, j\equiv 1(mod2)}^{k-2} \{|2(m+j) - (2(m+n+k)+1-(j+1)|\}$$

$$= \bigcup_{j=1, j\equiv 1(mod2)}^{k-2} \{|2(n+k-j)|\} =$$

$$= \{2(n+k-1), 2(n+k-3), 2(n+k-5), \dots, 2(n+2)\}$$

$$E_4 = \bigcup_{l=1}^{n} \{f(v_j u_{2l})\} = \bigcup_{l=1}^{n} \{|f(v_j) - f(u_{2l})|\}$$

$$= \bigcup_{l=1}^{n} \{|2(m+n)+k+1-(2(m+n)+k+1-2l)|\} = \bigcup_{l=1}^{n} \{2l\} = = \{2,4, \dots, 2n\}$$



Gambar 6. Pelabelan Super Graceful $B(3{,}5{,}5)$

Kasus 2, k adalah bilangan genap

Didefinisikan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1{,}2, \dots, 2(m+n+k)+1$ dengan $F(U_{1,i}) = 21 - 1, 1 \leq i \leq m$ dan $f(u_{2,l}) = 2(m+n)+k+1-2l, 1 \leq l \leq n.$

$$f(v_j) = \begin{cases} 2(m+n+k)+1-j, 0 \leq j \leq k, j \equiv 0(mod2) \\ 2m+j, 0 \leq j \leq k-1, j \equiv 1(mod2) \end{cases}$$

Didapat kontruksi himpunan label sisi sebagai berikut:

$$V_1' = \bigcup_{i=0}^{m} \{f(u_{1,i})\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{2i-1\} = \{1,,3, \dots, 2m-1\}$$

$$V_2' = \bigcup_{j=0, j\equiv 0(mod2)}^{k-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0}^{k-1} \{2(m+n+k)+1-j\} = \{2(m+n+k)+1, 2(m+n+k)-1, \dots, 2(m+n+1)+k+1\}$$

$$V_3' = \bigcup_{j=0, j\equiv 1(mod2)}^{k-1} \{f(v_j)\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0}^{k-1} \{2m+j\} = \{2m+1, 2m+3, \dots 2m+k-1\}$$

$$V_4' = \bigcup_{l=1}^{n} \{f(u_{2,l})\} = \bigcup_{l=1}^{n} 2(m+n)+k+1-2l = \{2(m+n)+k-1, 2(m+n)+k-3, \dots, 2m+k+1\}$$

Didapat kontruksi himpunan label sisi sebagai berikut:

$$E_1' = \bigcup_{l=1}^{m} \{f(v_0 u_{1,i})\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{|f(v_0) - f(u_{1,i})|\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} \{|2(m+n+k)+1-(2i-1)|\}$$

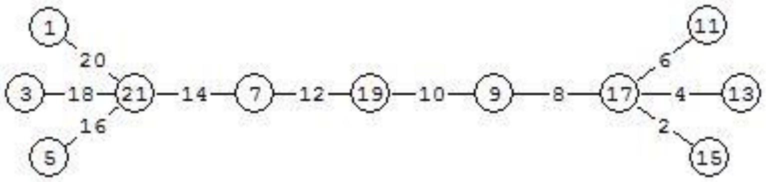
$$= \bigcup_{l=1}^{m} \{|2(m+n+k+1)-2i|\}$$

$$= \bigcup_{l=1}^{m} \{|2(m+n+k+1-i)|\} = \{2(m+n+k), 2(m+n+k-1), \dots, 2(n+k+1)\}$$

$$E_2' = \bigcup_{j=0, j\equiv 0 (mod 2)}^{k-1} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0 (mod 2)}^{k-1} \{|f(v_j) - f(v_{j+1})|\}$$
$$= \bigcup_{j=0, j\equiv 0 (mod 2)}^{k-1} \{|(2(m+n+k)+1-j) - (2m+j+1)|\} = \bigcup_{j=0, j\equiv 0 (mod 2)}^{k-1} \{|2(n+k-j)|\} =$$
$$= \{2(n+k), 2(n+k-2), \dots, 2(n+2)\}$$

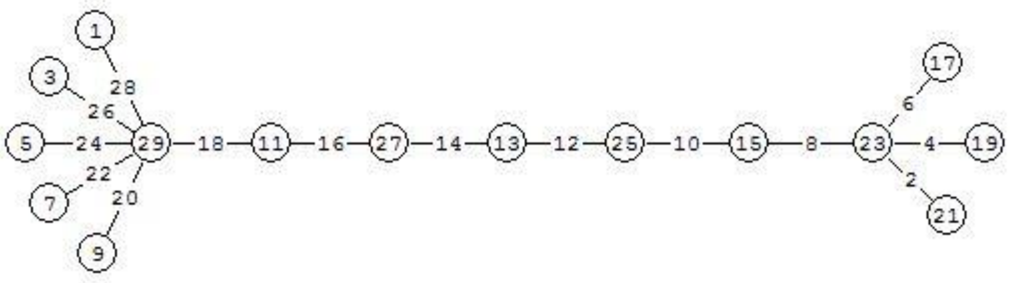
$$E_3' = \bigcup_{j=1, j\equiv 1 (mod 2)}^{k-2} \{f(v_j v_{j+1})\} = \bigcup_{j=1, j\equiv 1 (mod 2)}^{k-2} \{|f(v_j) - f(v_{j+1})|\}$$
$$= \bigcup_{j=1, j\equiv 1 (mod 2)}^{k-2} \{|2(m+j) - (2(m+n+k)+1-(j+1)|\}$$
$$= \bigcup_{j=1, j\equiv 1 (mod 2)}^{k-2} \{|2(n+k-j)|\} = = \{2(n+k-1), 2(n+k-3), \dots, 2(n+1)\}$$

$$E_4' = \bigcup_{l=1}^{n} \{f(v_j u_{2l})\} = \bigcup_{l=1}^{n} \{|f(v_j) - f(u_{2l})|\}$$
$$= \bigcup_{l=1}^{n} \{|(2(m+n)+k+1) - (2(m+n)+k+1-2l)|\} = \bigcup_{l=1}^{n} \{2l\} = = \{2,4,\dots,2n\}$$



Gambar 7. Pelabelan Super Graceful $B(3,3,4)$

Dari kedua kasus, kita memperoleh himpunan label simpul dengan nilai gasal dan label sisi dengan nilai genap dan semuanya berbeda. Gabungan dari label simpul dan sisi adalah $\{1,2,\dots,2(m+n+k)+1\}$. Sehingga, f adalah pelabelan *super graceful* dan $B(m+n+k)$ adalah graf *super graceful*. Berikut ini beberapa contoh pelabelan *super graceful* graf $B(m,n,k)$.



Gambar 8. Pelabelan Super Graceful $B(5,3,6)$

Teorema 2. *Graf* $P_n(1,2,\dots,n)$ *adalah graf super graceful*

Bukti. Misal $G = P_n(1,2,\dots,n)$, dengan $|V(G)| = n + \frac{n(n+1)}{2}$ dan $|E(G)| = (n-1) + \frac{n(n+1)}{2}$. Definisi pelabelan simpul untuk graf G dituliskan :

$$f(v_j)=\begin{cases} n^2+3n+1-\frac{1}{2}(i+1)^2, 1\le i\le n, i\equiv 0(mod2) \\ \frac{i(i+2)}{2}-1, 1\le i\le n, i\equiv 0(mod2)\end{cases}$$

untuk $1\le i\le n$ dan $i\equiv 0(mod2)$

$$f(u_{i,j})=n^2+3n+1-\frac{i^2}{2}-2j, 1\le j\le i$$

untuk $1\le i\le n$ dan $i\equiv 1(mod2)$

$$f(u_{i,j})=\frac{(i-1)(i+1)}{2}-1+2j, 1\le j\le i$$

Kemudian akan dikelompokkan himpunan label simpul dan sisi sebagai berikut.

Kasus 1, n adalah bilangan gasal

Didapat kontruksi himpunan label simpul sebagai berikut:

$$V_1=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n}\{f(v_{1,i})\}=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n}\left\{2i-1n^2+3n+1-\frac{1}{2}(i+1)^2\right\}=\{n^2+3n-1,n^2+3n-7,n^2+3n-17,\dots,\frac{n^2+4n+1}{2}\}$$

$$V_2=\bigcup_{i=1,i\equiv 0(mod2)}^{n-1}\{f(v_i)\}=\bigcup_{i=1,i\equiv 0(mod2)}^{n-1}\left\{\left(\frac{i(i+2)}{2}\right)-1\right\}=\{3,11,\dots,\frac{n^2-3}{2}\}$$

$$V_3=\cup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-1}(\cup_{j=1}^{i}\{f(u_{i,j})\})=\cup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-1}(\cup_{j=1}^{i}\left\{n^2+3n+1-\left(\frac{i^2}{2}\right)-2j\right\})=\{n^2+3n-1-2j;1\le j\le 2\}\cup$$
$$\{n^2+3n-7-2j;1\le j\le 4\}\dots\cup\{\left(\frac{n^2+8n+1}{2}\right)-2j;1\le j\le n-1\}$$

$$V_4=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-1}(\bigcup_{j=1}^{i}\{f(u_{i,j})\})=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-1}(\bigcup_{j=1}^{i}\left\{(\frac{(i-1)(i+1)}{2}-1+2j\right\})=2j-1;j=1\cup 3+2j;1\le j\le 3\cup 11+2j;1\le j\le 5\ \cup\dots\cup n^2-\frac{3}{2}+2j;1\le j\le n.$$

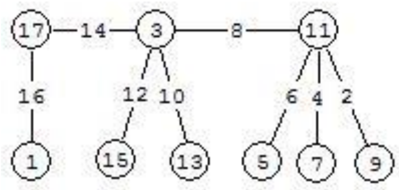
Didapat kontruksi label sisi sebagai berikut:

$$E_1=\bigcup_{i=1,j\equiv 1(mod2)}^{n-2}\{f(v_iv_{i+1})\}=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-2}\{|(n^2+3n+2)-(i^2+3i+2)|\}=n^2+3n-4,n^2+3n-18,\dots,2n+2$$

$$E_2=\bigcup_{i=1,i\equiv 1(mod2)}^{n-1}\{f(v_iv_{i+1})\}=\bigcup_{i=1,i\equiv 0(mod2)}^{n-1}\{|(i^2+3i+2)-(n^2+3n+2)|\}=n^2+3n-10,n^2+3n-28,\dots,2n+2$$

$$E_3 = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n} (\bigcup_{j=1}^{i} \{f(v_i u_{i,j})\}) = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n} \bigcup_{j=1}^{i} \{|n^2+3n+2-2j-i(i+1)|\} = n^2+3n-2$$
$$\cup\, n^2+3n-2\ \cup n^2+3n-12, n^2+3n-14, n^2+3n-16 \cup \ldots \cup 2n, 2n-2, \ldots, 2$$

$$E_4 = \bigcup_{i=1, i\equiv 0(mod2)}^{n-1} (\bigcup_{j=1}^{i} \{f(v_i u_{i,j})\}) = \bigcup_{i=1, i\equiv 0(mod2)}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{i} \{\ |i(i+1)+2j)-(n^2+3n+2)|\} = n^2+3n$$
$$-6, n^2+3n-8\ \cup \ldots \cup 4n, 4n-2, \ldots, 2n+4.$$



Gambar 9. Pelabelan Super Graceful $P_3(1{,}2{,}3)$

Kasus 2, n adalah bilangan genap

Didapat kontruksi himpunan label simpul sebagai berikut:

$$V_1 = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n} \{f(v_{1,i})\} = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n} \left\{n^2+3n+1-\frac{1}{2}(i+1)^2\right\} = \{n^2+3n-1, n^2+3n-7, n^2+3n$$
$$-17, \ldots, \frac{n^2+6n+1}{2}\}$$

$$V_2 = \bigcup_{i=1, i\equiv 0(mod2)}^{n-1} \{f(v_i)\} = \bigcup_{i=1, i\equiv 0(mod2)}^{n-1} \left\{\left(\frac{i(i+2)}{2}\right)-1\right\} = \{3, 11, \ldots, \frac{n^2-2n-2}{2}\}$$

$V_3 = \cup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-1} (\cup_{j=1}^{i} \{f(u_{i,j})\}) = \cup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-1} (\cup_{j=1}^{i} \{n^2+3n+1-\left(\frac{i^2}{2}\right)-2j\}) = \{n^2+3n-1-$
$2j; 1 \le j \le 2\} \cup$
$\{n^2+3n-7-2j; 1 \le j \le 4\} \ldots \cup \{\left(\frac{n^2+6n+1}{2}\right)-2j; 1 \le j \le n\}$

$$V_4 = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-1} (\bigcup_{j=1}^{i} \{f(u_{i,j})\}) = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-1} (\bigcup_{j=1}^{i} \left\{(\frac{(i-1)(i+1)}{2}-1+2j\right\}) = 2j-1; j=1 \cup 3+2j; 1$$
$$\le j \le 3 \cup 11+2j; 1 \le j \le 5\ \cup \ldots \cup n^2 - \frac{2n-2}{2} + 2j; 1 \le j \le n-1.$$

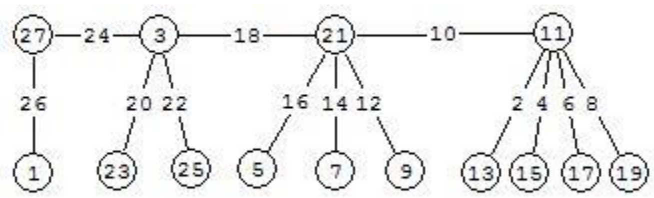
Didapat kontruksi label sisi sebagai berikut:

$$E_1 = \bigcup_{i=1, j\equiv 1(mod2)}^{n-2} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-2} \{|(n^2+3n+2)-(i^2+3i+2)|\} = n^2+3n-4, n^2+3n$$
$$-18, \ldots, 4n+2$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1, i\equiv 1(mod2)}^{n-1} \{f(v_i v_{i+1})\} = \bigcup_{i=1, i\equiv 0(mod2)}^{n-1} \{|(i^2+3i+2)-(n^2+3n+2)|\} = n^2+3n-10, n^2$$
$$+3n-28, \ldots, 4n+2$$

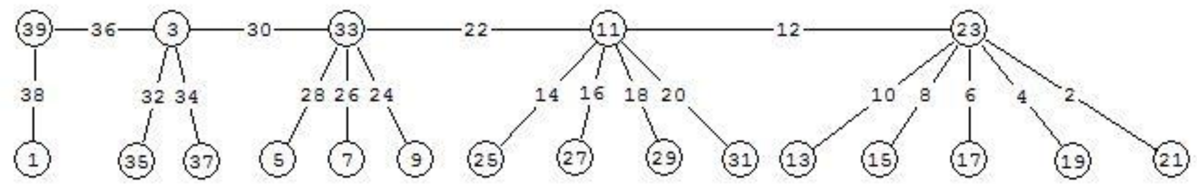
$$E_3 = \bigcup_{i=1, i\equiv 1 (mod 2)}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{i}\{f(v_i u_{i,j})\}\right) = \bigcup_{i=1, i\equiv 1 (mod 2)}^{n} \bigcup_{j=1}^{i}\{|n^2+3n+2-2j-i(i+1)|\} = n^2+3n-2$$
$$\cup\ n^2+3n-12, n^2+3n-16\ \cup \ldots \cup\ 4n, 4n-2, \ldots, 2n+4$$

$$E_4 = \bigcup_{i=1, i\equiv 0 (mod 2)}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{i}\{f(v_i u_{i,j})\}\right) = \bigcup_{i=1, i\equiv 0 (mod 2)}^{n-1} \bigcup_{j=1}^{i}\{\,|i(i+1)+2j)-(n^2+3n+2)|\} = n^2+3n$$
$$-\ 6, n^2+3n-8\ \cup \ldots \cup\ 2n, 2n-2, 2n-4 \ldots, 2.$$



Gambar 10. Pelabelan Super Graceful $P_4(1,2,3,4)$

Terbukti untuk n bilangan gasal dan bilangan genap, $f: V \cup E \rightarrow \{1,2,3,\ldots,u+v\} = \{1,2,3,\ldots,n^2+3n-1\}$ bijektif dan $f(uv) = |f(u)-f(v)|$ adalah graf *super graceful*. Berikut ini beberapa contoh pelabelan *super graceful* graf $P_n(1,2,\ldots,n)$.

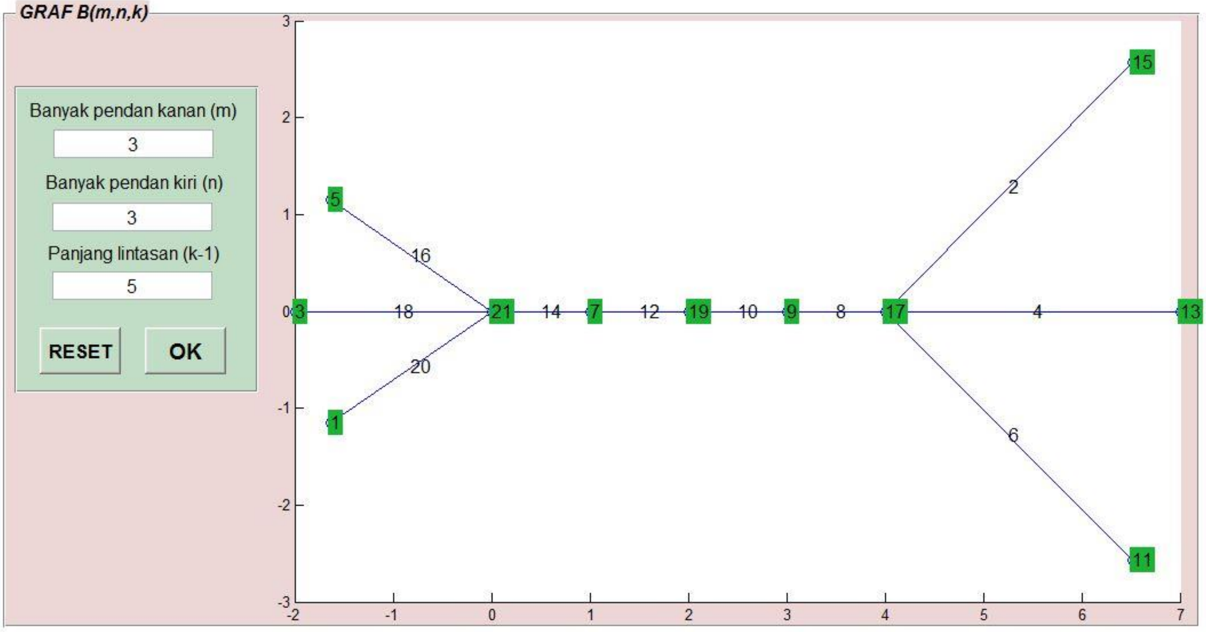


Gambar 11. Pelabelan Super Graceful $P_5(1,2,3,4,5)$

Implementasi pada MATLAB

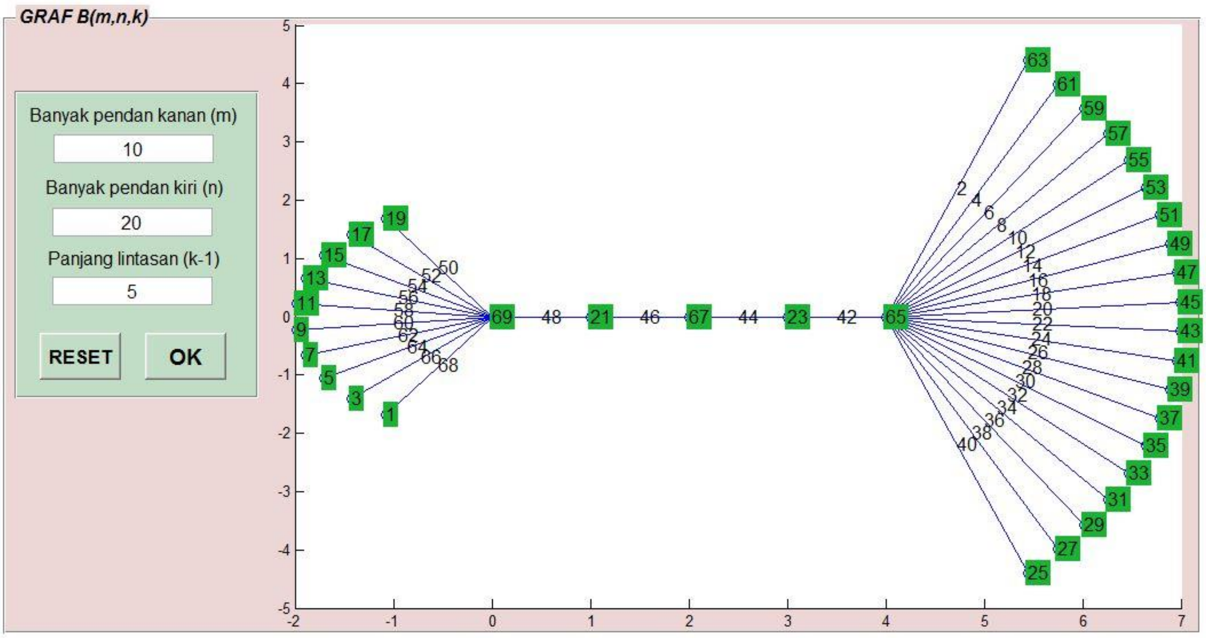
MATLAB merupakan salah satu alat matematika yang sangat berguna bagi implementasi algoritma dan visualisasi graf. MATLAB yang digunakan untuk jurnal ini adalah MATLAB R2013a. Pada MATLAB ini akan ditampilkan salah satu hasil pelabelan *super graceful* graf $B(m,n,k)$. Tujuan implementasi menggunakan MATLAB yang pertama adalah untuk mempermudah proses penggambaran graf $B(m,n,k)$ yang mempunyai nilai $1 \le m,n,k \le \infty$. Selanjutnya yang kedua adalah untuk mempermudah proses pelabelan *super graceful* graf $B(m,n,k)$ sehingga tidak membutuhkan waktu yang lama.

Berikut ini hasil implementasi dari pelabelan *super graceful* graf $B(m,n,k)$.



Gambar 12. Pelabelan Super Graceful $B(3{,}3{,}4)$ pada MATLAB

Hasil implementasi pelabelan *Super Graceful* pada MATLAB untuk graf $B(3{,}3{,}4)$ menghasilkan hasil pelabelan yang sama dengan perhitungan pelabelan secara analitik. Untuk $m, n,$ dan k yang lebih besar juga menghasilkan pelabelan *Super Graceful*. Misalkan $m = 10, n = 20$ dan $k = 4$ akan menghasilkan pelabelan seperti berikut ini.



Gambar 13. Pelabelan Super Graceful $B(10{,}20{,}4)$ pada MATLAB

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas simpulan yang diperoleh sebagai berikut.

1. Graf $B(m, n, k)$ adalah graf *super graceful*.
2. Graf $P_n(1{,}2, \dots, n)$ adalah graf *super graceful*.
3. Implementasi pada MATLAB menghasilkan gambar dan pelabelan pada graf $B(m, n, k)$ dengan $1 \leq m, n, k \leq \infty$.

4. Pelabelan graf $B(m,n,k)$ pada MATLAB dengan algoritma sesuai rumus umum graf $B(m,n,k)$ pada hasil pembahasan menghasilkan pelabelan yang sama dengan perhitungan pelabelan secara analitik.

DAFTAR PUSTAKA

A. Rosa, (1996), *"On Certain Valuations of The Vertices of A Graph", Theory of Graphs Internasional Symposium.*, Publication Rome, 349-355.

Hwang, F.K., & Mao, C. M., (2003), "Super Graceful Labelling of Graphs", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 47, 139-150.

M. A. Perumal., S. Navaneetha Krishnan., S. Arockiaraj., (2012), "Super Graceful Labeling For Some Simple Graph", *International Journal of Mathematics and Soft Computing* vol.2, No. 1, 35-49.

M. A. Perumal., S. Navaneetha Krishnan., S. Arockiaraj, Nagarajan, A. (2012), "Super Graceful Labeling For Some Special Graph", *International Journal of Mathematics and Soft Computing* vol.91, No. 1, 382.

Youssef, M. E., & Elsawy, A., (2008), Super Graceful Labeling of Some Graphs, *Australasian Journal of Combinatoric*, 41, 3-11.